第3学年 数学科学習指導案

〈主張〉

前時までの生徒は、三平方の定理及び三平方の定理の逆を証明し、直角三角形の2辺の長さから残りの1辺の長さを求めることができる。また、二等辺三角形や正三角形の辺の長さから高さを求め、面積を求める場面や、座標上の2点の距離を三平方の定理を利用して求めることができるが、長さを求める以外に三平方の定理やその逆を利用した学習経験はない。

そこで①~③の学習活動を設定する。

- ① 座標上の角の大きさを予想する場面を設定する。
- ② 座標上の角度が90°であることの多様な説明方法を追求させる。
- ③ 説明方法を振り返らせる。(それぞれの解法のよさを比較・検討させる。)

手立て

この数学的活動により

1 単元名

三平方の定理(啓林館 楽しさひろがる数学3)

2 単元の目標

- ◎ 三平方の定理について理解し、それらを活用することができる。
 - 直角三角形の3つの辺の長さの関係を具体的な観察や操作を通して調べ、三平方の定理を見いだすことができる。
 - 三平方の定理が証明できることを理解する。
 - 三平方の定理の意味を理解する。
 - 三平方の定理をいろいろな場面で活用しようとする態度を育てるとともに、活用できるようにする。

3 単元の評価規準

数学への関心・意欲・態度	数学的な見方や考え方	数学的な技能	数量や図形などについての
			知識・理解
・直角三角形の3つの辺	・三平方の定理について、	・三平方の定理を利用し	・三平方の定理や三平方の
それぞれを一辺とする	直角三角形の辺の関係	て, 直角三角形の未知の	定理の逆を理解してい
正方形の面積の関係に	ととらえたり, 各辺を1	辺の長さを求めている。	る。
関心をもち、その関係を	辺とする正方形の面積	・三平方の定理の逆を使っ	・特別な直角三角形の辺の
いろいろな直角三角形	の関係ととらえたりし	て, 三角形が直角三角形	比を理解している。
で調べようとしている。	ている。	であるかどうかを判断	
・三平方の定理の歴史や	・いろいろな図形の中に	している。	
いろいろな証明方法に	直角三角形を見いだし	・三平方定理を使って目的	
関心をもち、それらにつ	たり,補助的に作り出し	の長さを求めている。	
いて調べようとしてい	たりするなど, 三平方の		
る。	定理を適用するための		
・いろいろな問題の解決	工夫をしている。		
に, 三平方の定理を利用			
しようとしている。			

4 単元について

第1学年では、対称性に着目して図形の性質を発見したり、作図をしたり、その性質が成立する理由を考察したりしてきた。第2学年では、論証によって図形の性質を調べる方法を学んできた。第3学年の「図形と相似」からは平行線と線分の比など、生徒にとって新しい発見となるものが増えてきている。ここでは、いろいろな計量の場面や図形の性質を考察するときに活用できる重要な内容を学ぶ。「三平方の定理」は、紀元前2000年頃、エジプトで直角三角形を3:4:5の辺の長さの比を持つ三角形によって作ることができることが知られていたことに端を発する。今日の一般的な定理を発見したのはピタゴラスである。ピタゴラスはタレスのすすめにより、エジプトで数学の研究を行い、一般の三平方の定理を発見し、面積の関係として表現したとされている(紀元前550~500年)。三平方の定理は、ユークリッド幾何学の中でも最も大切な定理である。なぜなら、三平方の定理を導入することによりユークリッド空間上の2点間の距離が算出できるからである。また、代数を用いて空間や図形の性質を研究する解析幾何を展開するにも必要な定理だからである。解析幾何の創設者デカルトも、その研究手段として「相似な図形の性質と三平方の定理の他どんな定理も利用しなかった。」と述べている。幾何教育を図形や空間の性質を追求する学問にするためには三平方の定理は不可欠であるといえる。

この単元の学習においては、ただ単に図形の性質として証明するだけでなく、直角三角形の3辺の長さの関係として、その美しさに触れられるような工夫が必要である。さらに、この定理は直角三角形の3辺を1辺とする3つの正方形の面積の間の関係を表すものとみることから、図形と数式を統合的に把握することができる場面の一つであることを留意して指導にあたりたい。

定理を活用する場面として、3辺の長さから三角形の面積 を求めたり、弦の長さや接線の長さを求めたりする計量や、 ヒポクラテスの月形の定理などの平面図形での利用。直方体

の対角線の長さを求めたり、円錐の表面積や体積を求めたりする空間図形への利用。そして高等学校の円の方程式($(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$)や三角関数の関係($\sin^2A+\cos^2A=1$)、余弦定理($a^2=b^2+c^2-2bccosA$)などの図形と代数式とを結ぶことにつながる解析幾何の基礎を培うために、座標での利用を扱うこととする。このとき、求めるものを直接測らずに三平方の定理を利用することによってその値を導くことができることのよさを感得させたい。また、あわせて空間図形を展開図や切断面に変換する考え方や、解決に必要な図を自分でかく表現力をはぐくんでいきたい。

5 指導計画(全14時間)

次	学 羽 内 宏 (時間)	評 価				
火	学習内容(時間)	関	考	技	知	評価規準
	三平方の定理を見つける。(1)	0				・直角三角形の3辺の長さの関係に着目し、観
1	直角三角形の3辺の長さの間に					察,操作や実験を通して共通な性質を見いだ
	三平方の定理が成り立つことを				\circ	し、考察しようとする。
三	見いだす。					
平	三平方の定理の証明。(1)		0			・三平方の定理の証明の仕方を知り,考察して
方	いろいろな三平方の定理の証明					いる。
\mathcal{O}	法について学ぶ。					
定	直角三角形の辺の長さ(1)			0		・三平方の定理を使って、2辺の長さが分かっ
理	三平方の定理を使って,2辺の長					ている直角三角形の残りの1辺の長さを求め
	さが分かっている直角三角形の					ている。
	残りの1辺の長さを求める。					
	三平方の定理の逆(2)		0			・3・4・5の3辺をもつ三角形が直角三角形で
	三平方の定理の逆が成り立つこ					あることの証明から, a²+b²=c²の関係が成り
	とを知り、3辺の長さから鋭角三					立つ3辺(a·b·c)をもつ三角形すべてが直
	角形・直角三角形・鈍角三角形					角三角形であることを証明している。(直接
	のどれであるかを判断すること				0	証明)

6	ができる。				・a²+b²>c² ならば鋭角三角形,a²+b² <c² th="" なら<=""></c²>
時					ば鈍角三角形であることを判断している。
間	まとめの評価問題(1)	0	0	0	・第1節のまとめ問題に取り組み、自己評価を
					行う。
2	平面図形への利用(1)		0		・三平方の定理を使って二等辺三角形や正三角
	正三角形・二等辺三角形・不等				形の高さを求めている。
三	辺三角形の計量	\circ			・不等辺三角形の3辺の長さから高さを求め,
平					面積を求めている。
方	解析幾何への利用(1)		0		・三平方の定理を使って,2点間の距離を求め
\mathcal{O}	座標上の2点間の距離の計量				ている。
定	解析幾何への利用 (1)		0		・座標上の直角との大小を, <u>三平方の定理及び</u>
理	座標上の線分のなす角の計量				<u>三平方の定理の逆</u> を使って説明している。
と	(本時)	\circ			・既習の相似な図形の性質や長方形の性質、関数の
そ					考えを用いても説明できることが分かっている。
0	空間図形への利用 (1)	0		0	・直方体の対角線や頂点を結ぶ最短距離を求め
逆	直方体の対角線・最短距離の計量				る場合に,直角三角形を見いだし,それらの
0					求め方を考察している。
応	空間図形への利用 (1)	0	0		・円錐や正四角錐等の錐体の高さを求める場合
用	錐体の計量				に,直角三角形を見いだし,それらの求め方
					を考察している。
6	空間図形への利用 (1)	0		0	・円柱や直方体の中の球の計量や立体の切断に
時	いろいろな問題				関する課題解決の場面で, 三平方の定理が利
間					用できることを理解している。
3	単元テスト (1)	_	_		・単元のまとめの問題に取り組んでいる。
	補充・発展(1)				・補充 または 発展問題に取り組んでいる。

6 指導の構想

新学習指導要領の第3学年の目標の中に三平方の定理について、「観察、操作や実験などの活動を通して理解し、それらを図形の性質の考察や計量に用いる能力を伸ばすとともに、図形について見通しをもって論理的に考察し表現する能力を伸ばす。」とある。

このためには、三平方の定理について理解し、その性質を用いて直角三角形の辺の長さを求める練習を繰り返し行い、計算に習熟させることが大切である。その上で、平面図形や空間図形の中に直角三角形を見いだし、長さや距離を求めることで、図形をみる目を育て、定理を活用する力を伸ばしていきたい。この「みる目」と「活用する力」が三角比や測量学など、今後、高等学校での学習の基盤となると考えられるので、重点的に指導し、十分な定着が図られるように工夫していきたい。

「三平方の定理の逆」については、中学校学習指導要領解説<数学編>(文部科学省、平成20年9月)に次のように述べられている。

また,三平方の定理の逆,つまり「三角形の3辺の長さをa, b, cとするとき, $a^2+b^2=c^2$ ならば,この三角形は直角三角形である。」については、数学的な証明に深入りするのではなく、むしろ直角三角形になるかどうかは3辺の長さの関係によって決定されるという事実に着目できるようにすることが大切である。」(p.123)

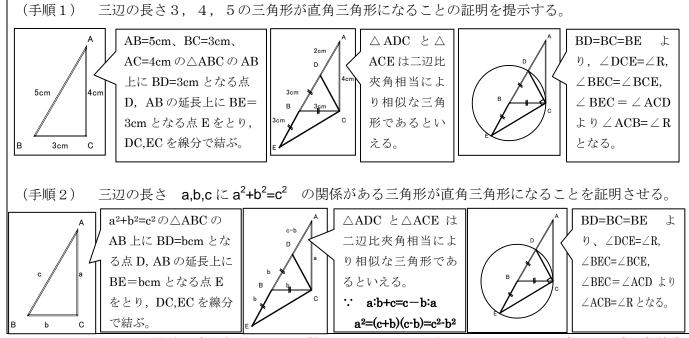
教科書では、「三平方の定理の逆」の証明を発展的な学習として扱い、前項のように中学生にはなじみのない「同一法」による間接証明が紹介されている。もちろん、「同一法」などの間接証明は数学において重要な証明方法の一つであり、高等学校への接続として学習価値は高い。しかし、三平方の定理を使って三平方の定理の逆を証明しているため、三平方の定理と三平方の定理の逆の区別がつかないことが多い。(啓林館「楽しさ広がる数学3」平成23年度版 p.123 参照)

また、この「三平方の定理の逆」は、「次の長さを3辺とする三角形のうち、直角三角形はどれですか。」のように3辺を示して直角三角形であるかないかを判断するだけの練習問題を数題解くのみで、その学習価値をこの時点ではほとんど実感できないのが現状である。

そこで、「三平方の定理の逆」の証明については下記のような学習の流れで直接証明を扱いたい。この証明方

法は、相似な図形の性質を利用したもので中学生にも証明できるように考えたものである。

三平方の定理の逆の指導の流れ(4時間目/14時間)



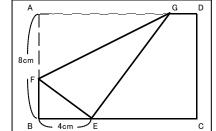
この証明に関しては、生徒が自ら気付くことは難しいが、3辺の長さを3·4·5 から a,b,c(a²+b²=c²)に条件変更した問題として提示すれば、一般化した三平方の定理の逆の証明を自力解決することができる。こうして三平方の定理の逆を獲得し、直角三角形でなければ鋭角三角形か鈍角三角形かの判断までを練習問題とする。次に、生徒が三平方の定理と三平方の定理の逆を利用する場面を設定(本時)し、その有用性を実感することができるように指導計画を作成した。

7 生徒の実態

本校数学科では少人数指導を行っている。授業したコースは,数学に関して興味・関心が高く,発展的な問題に取り組む意欲のある生徒で構成されたクラスである。図形の論証に関しては,

合同な三角形を利用して線分の長さや対応する角の大きさが等しいことを形式的に証明することに苦手意識は少ない。しかし、記述経験の少ない平行線・ひし形・長方形や等積変形などの性質を根拠とする証明に関して、筋道が通るように工夫して表現することに抵抗感をもっている。最近は自分の考えや多様な解決方法を発表できる雰囲気ができてきたので、生徒の意見を積極的に引き出しながら、論理的に表現する力を伸ばしていきたいと考えている。

本単元の学習では、右の図において FB の長さを求める問題の場面で、「FB 以外に求めることのできる長さはないか。」の発問に対して、意欲的に取り組んだ。具体的には G から EC に垂線を下し、その交点を H として相似な三角形の性質を利用したり、 $\triangle GEH$ で三平方の定理を利用したりして、GD、HC(不定)以外のすべての長さを 2/3 の生徒が計測した。計測方法のそれぞれの考え方のよさを実感し、「なるほどそう考えることもできるのか……」と発言する生徒の姿も見られた。



8 本時の指導(9/14時間)

(1) ねらい

○ 三平方の定理及びその逆、相似な図形、円周角の定理(二等辺三角形の性質)、いろいろな四角形の性質、一次関数のグラフの性質などを利用して座標平面上の直角を説明することができる。

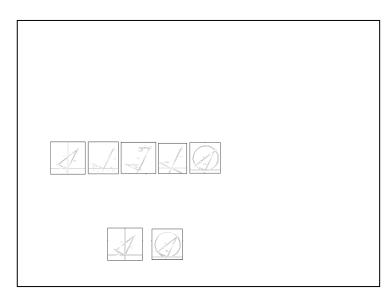
<数学的な技能>

○ 多様な説明方法のそれぞれのよさを理解できる。

<数学的な見方・考え方>

(2) 本時の構想

本時の学習課題は「 \angle AOB を計測しよう」である。生徒は前時の学習から,二つの座標間に直角三角形を作り出し,その距離を求めることを経験している。座標上には A,B,O(原点)が与えられるため,AB,AO,BO の三つの距離を計測することができる。この三つの距離の関係から三平方の定理の逆を利用して \angle AOB を計測する(直角であると証明する)ことができる。直角であることを証明するには,他にも様々な解決方法がある。学習経験が近い内容では,相似な三角形を見いだし,その性質を利用して \angle AOB を計測することができる。また,線分 AB の中点が y 軸上(0, 5)に位置



することを利用すると、円の性質(直径に対する円周角は直角であること)を利用できる。また、第2学年で学習した長方形の性質や、一次関数の傾きを根拠に説明することができる。直角であることを説明する方法はこうした多様なアプローチが可能であり、それぞれの説明方法のよさを認め合うことは図形を「みる目」を育てることにつながると考える。

こうした図形に対する柔軟な思考を育成するために、「利用する図形の性質を思いつく方法はありますか?」と発問する。この発問により、生徒は「図に補助線や図形を加えれば利用できる性質に気付くことができる。」と考える。この思考から補助線や付け加える図形によって複数の解決方法があることに気付き、多様な解決方法を追求する態度を育成できると考えた。しかし、すべての生徒が時間内に自ら多様な説明方法に気付くことができるとは限らない。そこで、グループでの情報収集の時間を設定し、多様なアプローチ方法を確認する場面を設定する。この手立てにより、すべての生徒が自ら複数の説明方法を探究することができると考えた。

また、私が授業を行う上で特に配慮している次の2点について説明を加えたい。

① 「意図的にフリーハンドで図をかかせる。」

高等学校の先生方と数学教育について協議した際,図の与えられていない問題に対して余白を使ってフリーハンドで略図のかけない生徒が想像以上に多いという話をうかがった。私たちの指導を振り返ってみると,授業時間内に効率よく問題を解決させることや,生徒の思考を補助することを目的として正確な図を印刷して配布したり,問題の条件を読み違えないように記号までしっかり記入された図を用いて



考えさせたりすることがあった。図形領域だけでなく、関数でも小さな方眼用紙を配布し、目盛りを使ってグラフをかかせることもある。高等学校の数学では、道具としての略図をフリーハンドでかける力が不可欠である。そこにはおよその量の見積りが必要であり、自分で図をかきながら与えられた条件を整理することで、図形やグラフについての気付きが生まれてくる。こうした思考の道具としてフリーハンドで図をかかせる場面を意図的に設定することが中学校の数学科授業では大切であると考えている。

② 「解法の手順(解決方法)を提示し過ぎない。」

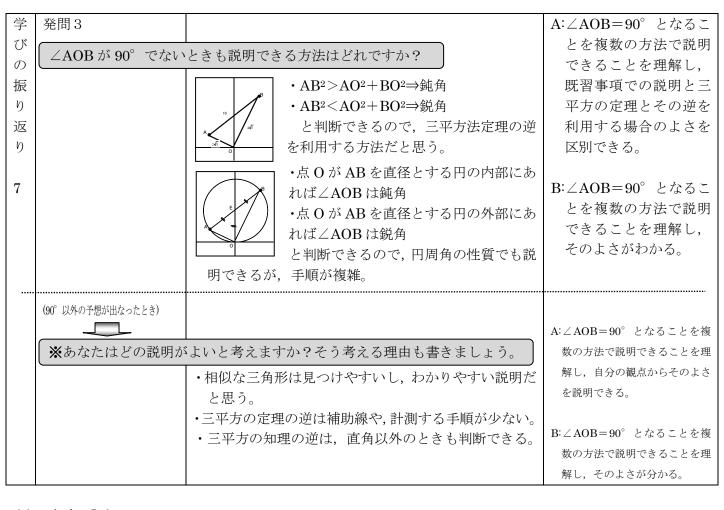
こうした問題解決型の授業では問題の解き方を与えるのではなく、解決へのアプローチを考えさせたい。問題場面やそこに含まれている数学的概念の分析を、スモールステップにして認知葛藤の壁をなくすように展開を工夫すれば、生徒全員が問題解決への見通しをもち、同様の解決ができることが予想される。しかし、この授業では「三平方の定理を使えば解決できる」、「相似な三角形を利用しよう」などの問題解決の方法を確認しない。それは柔軟な思考のできる生徒の育成をねらいとするからである。もちろん、「多様な説明方法を考えなさい」と指示するだけでは、すべての生徒が意欲的に課題追求できるわけではない。そこで、補助線には複数の引き方があることを確認する。この補助線によって説明方法が変わる見通しをもち、気付かなかった補助線を教え合うことによってグループ学習の必然性を感じることができる。この学習形態の工夫によりすべての生徒が自分なりの多様な追求ができると考えている。

これらの手立てにより、生徒が三平方の定理とその逆を利用するよさに気付き、多様な図形の見方を育成できると考えて本時の指導を構想した。

(3) 本時の展開

		T.	
時	主な発問や指示	生徒の活動と意識の流れ	・指導上の留意点
間	1 mls = 37 dd am dat (d		□評価
導	本時の学習課題提示	座標上の角度を計測しよう	・タイトルを板書させる。
入			・ノートにフリーハンド
	問題 1	У	で座標軸, 点 A, 点 B を
5	<u> </u>	とらせて ZAOB の大き	
	点 B (4,	さを予想させる。	
	∠AOB は何	・生徒の反応を挙手により、把握する	
	図をかいて	考えましょう。	り把握する。 ・全 員が 90°になると答えた
		場合は、以降「何度になる	
		・90°よりも大きい。(100°程度)	参りは、
		・90° になる。	ことを確認する。」授業展開
		となる。また、発問3は※	
		・90°よりも小さい。(80°程度)	印の発問に変更する。
			・この段階では、∠AOB
			=90°になる理由や説
			明を発表させない。
課	発問 1		7,0,1,1,0,0,0,0
題)になるか,確かめるにはどうすればよいでしょうか?	・説明の必要性(よさ)
解	2110B % 11/X (30	The saw, HEW WY STETACE Y / AUTOS C COS YW.	を確認する。
決		・正確に図をかいて計測する。⇒不正確・曖昧	
		・図形の性質を利用して説明(証明)する。⇒○	
15	発問2		
	利田する図形の性質を	を思いつくにはどうすればよいでしょうか?	学習課題に見通しをもたせる手立て
	小川川りの四川かり圧員で	T	1 BINGING CONCERNATION
		・新しい図形を加える。	・補助線によって利用す
			る図形の性質が変わる
			ことを確認する。
			多様な解法を追求する意欲をもたせる手立て
	指示1		
	問題 2	У	
		$\overline{A} A (-4, 2)$,	
	点B(4, 8		
		度になるか(=90°)を A. /	
	いろいろな力	方法で説明しましょう。	
			・10 分間 個人課題追求
			させる。
			- 机間指導
			N alett 1 H 24.
収			・自分の意見の正誤の確
集		認・他の生徒の気づき	
•	地口 ピノイ アイノ を見	共有して,説明方法を増やしましょう。 T	から更に理解を深め、
共			気付かなかった説明を
有			知る。
8	気付いたことをノー		
		1	

	トに記入させる。		
発	指示3		↓・グループ追求終了後,
表)になるかを説明しましょう。	∠AOB=90° となるこ
	2110B (8)/1/2(00	(予想される生徒の説明・気付き)	
深		三平方の定理を利用して	る。
化		$AB=10, AO=2\sqrt{5} BO=4\sqrt{5}$	
•		$AB^2 = AO^2 + BO^2 + bO$	・机間指導で生徒に予告
統		三平方の定理の逆から	し、発表させる。
合		$\begin{array}{ c c c c c c c c c c c c c c c c c c c$	し、元叔とせる。
		直角三角形であるといえる。	
		0 EA_AN (WSC(7.5)	
		このには	
		△ACO∞△ODB	
15		$\angle ACO = \angle ODB = $ 90° \$	
10			1
		$\angle AOC + \angle OAC = 90^{\circ}$	
		±t, ∠OAC=∠BOD	
		$\downarrow 0 \angle AOB = 90^{\circ}$	 □生徒の説明後,その説
		\$\frac{1}{2}\text{TOD} \text{ 00}	明が正しいことを確認
		三平方の定理より	し、同じ方法で説明で
		AE=OE=BE=5	きたか確認する。
		点 O は AB を直径と	
		する円習上になるこ	
		とがわかるので円周	
		角定理より	
		∠AOB=90° F I₁0	
		点 F(0,10) をとり	
		Till Till	
		EO=EA=EB=EF=5	・発表が終了した時点で、
		FO=AB=10	数学的に同じ考え方で
		より対角線がそれぞ c o D れの中	
		点で交わり、対角線の長さが等しいので四角形 AOBF	
		は長方形となり ∠AOB=90 °	(時間がない場合は深入りしない)
		座標より2直線の式は	
		AO: $y = -\frac{1}{2}x$ BO= $y = 2x$	
		$\int_{y=2x}$ 傾きの積は $\left(-\frac{1}{2}\right) \times 2 = -1$ となるの	
		A_{\bullet} $y=-\frac{1}{2}x$	
		∠AOB=90°	
		(※高等学校内容)	
	<u>I</u>		1



(4) 本時の評価

- 多様な説明方法を理解し、自分の観点からそれぞれのよさを比較できている。(観察・ノート)
- ・三平方の定理及び三平方の定理の逆を利用して直角を説明できることを理解している。(ノート・観察)

<参考・引用文献>

- · 中学校学習指導要領解説 数学編(文部科学省)
- ・新中学校数学科 重点指導事項の実践開発 (根本博編著)
- ・「問題解決の授業」に生きる「問題」集 (相馬一彦編著)
- ・<論説>算数科授業で学習者に期待される変容(金子忠雄)

<板書計画>

